
Collatz

～数学を数楽しよう～

第1章 プロジェクトの概要など

1. プロジェクトの名称、目的など

プロジェクトの名称に関しては、数学者：Lothar Collatz にちなむ。特に深い意味があるわけではないが、彼が提唱した Collatz の数列という問題によって、団体の代表が数学を好きになったことから、この活動を通して数学を好きになってくれる人が一人でも増えることを願って名付けた。

プロジェクト目的は、対象者別に分けて三つある。

1.1 生涯学習としてのツール

現在、Youtube などでは数学をはじめとして様々な企業や個人が勉強の解説動画を上げている。それらのほとんどは受験のテクニックなどに重点を置いたものばかりであり、数学的な思考を楽しむというよりパズルを楽しむといったニュアンスが強い。その中でも、純粋に数学を学べるようなツールを作成し、公開する。

1.2 小学生/中学生/高校生に向けてのツール

学校現場では時間や制約などが多く、教えることができないような、「数学のお作法」や「発展的な話題」を学べるようなツールの作成を目的としている。公式を単に説明し、適用するのではなく、またよく言われているように「公式を証明できる」ようになろうということに目的を置くのではなく、「数学する」という言葉の意味を学んでいけるようなツールの開発である。それはよく、「高校数学」が算数であるというふうな表現を受けてしまう理由を考え、どうにか、その部分を、対象者が学んでいる内容の中から「数学」へと昇華しようという試みである。

1.3 学生へのツール

最後は、理系大学生をはじめとして数学の専門的な内容の単位を取得しなければならない(数学が苦手な)方に向けてのツールである。大学で学ぶ数学には、それまで学んできた学校数学と大きなギャップがある。それに加えて、大学内でも時間の制限等の問題もあり、大学生が自学自習と授業の中で、「求められる」数学力を身につけるのはかなり困難な状況になってきていると言える。現に学校教員を目指す本学の数学の免許取得に必要な授業を見ても、それらを自学自習で学ぶのにはかなり難しいものがある。全国で同じような状況に陥っている学生に向けて、授業では説明しないようなところ、教科書を見ても「自明」として証明されていないような内容を細かく掘り下げて、説明し内容をまとめるようなツールの開発が目的である。

2. 代表者および構成員

・代表者

松田 凌 数学領域 3 回生

・構成員

鐘ヶ江 佳奈 数学領域 3 回生

竹内 航平 数学領域 3 回生

内藤 大暉 数学領域 3 回生

銚山 航大 数学領域 3 回生

3. 助言教員

大竹 博巳 (数学科)

4. その他

第2章 内容や実施経過など

活動の内容は四つに分類できる。

2.1 数学お助けチャンネル Collatz の運営

これは、前述した目的の一つ目と三つ目に相当する活動である。Collatz の最も中心的な活動である。Youtube に作成した動画を公開することである。加えて、作成した動画の内容に関する教科書的なもの(以降、講義録という)を作成し、HP に掲載している。昨年度

までは、内容がまだ簡単なものが多く、構成員同士での議論で内容の真偽をある程度確かめられていたが、今年からは幅広い内容を取り扱うようになったので、知人や外部の団体とも協力して内容を精査するようになった。そのために、他大学での会議や打ち合わせ等が運営上必要になっていった。

今年度撮影した動画、講義録等は成果のところに取りまとめる。

2.2 Youtube チャンネル コラッツの森 の運営

これは、前述した目的の二つ目に相当する。極力、小学生や中学生にも抵抗なく見てもらうために人形を用いた動画にしている。内容は、数学的に難しいものから工作的なものまで、幅広く撮影している。昨年度までは、同じ youtube チャンネルの中に入れていたが、想定している対象者が違うことから、新しくチャンネルを立ち上げた。

2.3 学内での質問対応等

Collatz の立ち上げのきっかけにもなった、本学の学生の数学学習の支援である。これは、動画作成と並行して行う場合もあるが、日を設定して個別に対応することもある。授業に関する内容がほとんどであるが、中には動画に関連した発展的な話題や、個人的な質問への対応もある。

また、授業とは関係のない、発展的な数学の内容や現代的な課題を紹介する形で何回かゼミを開催した。圏論ゼミと関数解析ゼミである。

2.4 広報的活動 / 外部との連携

・広報活動について

広報活動の一つは、後述するが、動画の本数はかなり多い。また、講義録も種類が多く、視聴者の方が欲しい情報を極力手に入れやすくするために、HP を作成している。

(URL :<https://collatz3105168421.wixsite.com/collatz-mac>)

また、教育系 youtuber をまとめたサト:studytube にも掲載されている。さらに、いくつかのサイトでも紹介されている。(Eg. neuralsparrow.com)

もう一つは、動画の内容に関する質問や意見への返信である。Youtube に送られてくる質問や Twitter に送られてくる質問、直接メールで送られてくるものへの返信である。

・外部との連携

Collatz の活動を通して、今年度は二組の外部の団体と連携することになった。

一組は、「学びの場」「解答作成班」である。(それぞれ異なる活動をしているが、管理運営者が同じなので、一つの団体としてまとめておく。) 学びの場では、数学を学んでいる学生や高校生、時には研究者などのコミュニティを提供しているのが学びの場である、現在 200 人程度の参加者がいる。関東を中心としているので、関西地区では Slack という SNS を用いた議論がメインである。解答作成班は、標準的な理系大学の数学科の教科書である杉浦光夫著「解析入門」と斎藤正彦著「線型代数入門」の教科書に載っている問題の模範解答を作成している。二つを運営されている学習院大学の学生から、Twitter を通して連絡があった。Collatz の三つ目の活動目的に一致していると判断し、共同管理者/解答作成に関して Collatz が関わるようになった。

二組目は、「京都自主ゼミサークル」である。こちらは、京都で隔週ペースで開催されている有志による自主ゼミである。参加者は、社会人から大学生おおよそ 7 名ほどおり、ルール上高校生も参加可能である。活動内容は、本を決めて輪読することと、各々の数学に関する勉強した内容を発表し合うことである。こちらも twitter を通して連絡があり、Collatz の活動目的の一つ目に一致していると判断し、立ち上げから協力することになった。

第3章 結果や成果など

活動内容ごとに成果をまとめる。

3.1 数学お助けチャンネル Collatz の運営

(ア) 撮影した動画のまとめ

今年度撮影した動画は次の通り。

(そのタイトルの動画の本数)

① 解析学分野 計 189 本

関数解析 計 89 本

解析学の基本事項(10) / Banach 空間の定義(17) / Banach 空間の例 (11) / 線型作用その連続・有界(11) / 逆作用素・Banach 環(10) / 一様有界性定理(11) / 開写像定理(10) / 閉グラフ定理(9)

関数解析では、ごく基本的な内容である、Banach 空間の定義と三大基本定理と呼ばれる三つの定理の内容を取り扱った。関数解析は、純粋数学だけではなく、数理物理などでも幅広い応用を持つ分野である。かなり注目度が高く、視聴回数やコメントも多く寄せられた。講義録:Functional analysis である。

複素関数論 計 24 本

順序集合(6) / 実数(3) / 拡大実数系の定義(3) / 列の収束・発散(5) / 部分列(2) / 正項級数 (2)

複素関数論では、基本となる整級数の取り扱いに必要な道具を取揃えることに重きおいた。これらの内容は、複素関数論にとどまらず、解析学全般での基礎的な道具である。時間の都合上、それらの紹介や定義だけで終わってしまった。講義録:Complex analysis である。

複素力学系 計 40 本

複素力学系入門(6) / 固定点の分類(4) / メビウス変換の具体例(4) / メビウス変換の性質(4) / 二次式の力学系(5) / 二次の複雑な力学系(5) / リーマン球面の定義(4) / Lipschitz 連続(4) / 有理関数の位数(4)

複素力学系は、フラクタルと呼ばれる性質を持つ(拡大すると自分と同じ図形が現れる)幾何などとも関わりのある分野である。ここでは、複素関数論になる基礎的な内容を都度紹介し、厳

密性を求めるのではなく、複素力学系とはどのようなものかという雰囲気が伝わるように心がけた。講義録は、そういった背景から、作っていない。

Lebesgue 積分論 計 36 本

ルベーグ測度の定義(19) / 測度の性質と BOLEL 集合(4) / 可測関数の定義と性質(4) / 階段関数の定義と性質(3) / LEBESGUE 積分の定義(6)

積分論は、現代解析学における基本的なツールであり、関数解析との関係がある。そこで、一から厳密に内容を取りまとめた。測度論の中に本来であれば組み込まれるが、解析的な内容に特化した議論を取りまとめたため、別枠としてまとめている。講義録は現在作成中である。

② 代数学分野 計 145 本

群論 計 40 本

群論:introduction(3) / 群の定義(5) / 部分群の性質(5) / 巡回群と生成系(4) / 剰余類と lagrange の定理(5) / 正規部分群と剰余群(5) / 準同型写像の定義(4) / 第一準同型定理(4) / 準同型定理の例 (5)

群という代数構造の基礎となるもので、抽象数学への入り口となる内容である。そのため、種々の華やかな理論を目指すのではなく、厳密性を欠かないように丁寧にゆっくり目に議論を進めた。目標としては第一準同型定理を理解し、その応用例として高校数学における複素数の極座標表示と虚数単位を用いた表示の正当性についてまとめた。講義録:Group theory である。

線型代数後半 計 62 本

行列式の定義(5) / 行列式の性質(6) / 余因子行列(6) / 線型空間の定義(5) / 線型部分空間の例(4) / 一次独立・一次

従属(2) / 張る空間(5) / 線型空間の次元(2) / 線形写像と空間の同型(3) / 線形写像の像と核(4) / 次元定理(3) / 線型空間の和空間(3) / 線形写像の表現行列(5) / 固有値の固有ベクトル(5) / ノルムと距離空間(4)

昨年度撮影した、線型代数前半【2017】の続編となる内容である。対角化を理解することを目標として、行列式からスタートした。対角化が線型空間の構造を把握するために役立つという発想を理解できるようにし、多くの例を用いるのではなく、最小限にとどめ議論を明確にした。講義録は行列(下)である。

線型代数前半【2018】計 43 本

行列の定義と演算(6) / 行列の積とその性質(5) / 線形写像と行列の対応(6) / 逆行列とブロック行列(6) / 基本変形の定義と意味(6) / 標準形への基本変形(6) / 基本変形による正則性への条件(2) / 一次連立方程式系(2) / 冪零行列の性質(1) / 対称行列と直交行列の関係(3)

これは、昨年度作成した線型代数前半【2017】のリメイクである。前回同様、行列の定義から入ったが、連立方程式の解法をメインにせず、線型行列の演算になれること、また大学初年次に取り扱われることが多いことを鑑みて、数学の証明の書き方等にも言及しながら進めた。一次方程式系の解法は応用例の一つとして取り扱い、その代わり昨年度と違い多くの応用例を紹介することにした。これは、線型代数の重要性を感じてもらうための工夫である。講義録は行列(上)である。

③ 幾何学分野 計 87 本

測度論 計 26 本

実数の構成(11) / 集合列の極限(5) / 集合体の定義(4) / 測度の定義(6)

測度という積分に必要な概念を、集合論の立場から解説を試みたものである。実際には、ここから出発して、ルベーグ積分論へとつながっていくが、集合論を主として取り扱ったことからここに設定した。

距離空間【2018】計 61 本

距離空間を学ぶ準備(6) / 距離関数の定義(5) / 種々の距離関数の例(5) / 内転 外点 境界点 (5) / 開核と開集合(5) / 距離空間の開集合系(5) / 開核の性質(5) / 閉集合と閉包(5) / コンパクト(5) / 点列コンパクトの定義(5) / 点列コンパクトの例(5) / 全有界と有界(5)

これは昨年度作成した距離空間【2017】のリメイクである。距離空間を使う場面を多く想定して、昨年度よりも問題解説の量を増やした。また、距離空間ではなく、この先位相空間を学んでいくのが普通のカリキュラムなので、それに応じて距離空間ではなく位相空間論の話題も織り込んだり、いくつかの立場による理論の微妙な違いなどを紹介した。講義録は Metric space である。

(イ) 視聴回数と反響

現時点での視聴回数/総再生時間数とチャンネル登録者は

視聴回数 87,324 回

総再生時間数 677,913 分

チャンネル登録者数 523 人

である。比較のため昨年度の Collatz と京都教育大学公式 youtubekyokyochannel (以下:kyokyoch)を引用すると、

昨年度 Collatz:

総再生回数 4700 回

総再生時間 17,569 分
チャンネル登録者 40 名

kyokyo ch

総再生回数 60,274 回
総再生時間 編集者しかわからない:不明
チャンネル登録者 251 名

と急成長したことがわかる。さらに、kyokyo ch は、Collatz よりも動画の本数も期間も倍以上ある。ネームバリューもあることと比較して視聴回数が多いのは成果の一つであると考えられる。さらに、嬉しいことに視聴回数の上がり方より総再生時間の伸び率の方が大きい。これは、動画をチラ見するのではなく、動画を長く見てくれる視聴者が増えたことを意味する。この原因となったのは、やはり、本質的に需要があること、動画の本数を急激に増やしたこと、外部との連携による宣伝効果などが挙げられる。また、数学ブームと言われるように、数学に興味のある人が増え、教育系 youtuber としては、最大のヨビノリなどの活躍も大きいと考えられる。加えて、3.3 でも取り扱うが、多くの大学で数学に苦しむ学生が多いことも要因の一つである。

3.2 Youtube チャンネル コラッツの森 の運営

撮影した動画は、
等周問題って何？ / 等周問題の歴史 / 等周問題の結論 / 等周問題の証明 / ゼロの織りなすハーモニー / 不思議な三角形 / 面積の不思議 / 無限との戦い

である。なかなか、内容をまとめて、準備をして、編集をしてというのが、工夫が必要でありうまくルーティン化して撮れなかった。また、撮影には三人以上必要であり、日程を合わせて、打ち合わせを行ってなど、かなり手間がかかったため、本数も取れなかった。こちらは、

視聴回数 298 回

総再生時間数 873 分

チャンネル登録者数 9 人

と、まだまだこれから伸びていくと思う。

3.3 学内での質問対応等

学内で質問等を対応した人数は 34 名である。内訳は
一回生 9 名、二回生 11 名、三回生 10 名、四回生以上 2 名、院生 2 名
である。累計回数は、概算で、
一回生 170 回、二回生 240 回、三回生 75 回、
4 回生以上 20 回、院生 30 回
計 535 回ほどである。ラインやメール等での対応を加えると、おおよそ 1000 回ほどになる。Collatz の存在意義としては、やりがいを感じる数字ではあるが。しかし、ここで、考えなければならないのは、図書館の質問対応である。Collatz を初めて利用したという一回生の中で、図書館では答えられなかったという事案が複数相次いだ。また、図書館で質問対応している院生からの質問もあった。やはり、数学を学習する上でのサポート状況が本学にはないことが浮き彫りになっている。

3.4 広報的活動 / 外部との連携

広報活動等の成果ではないが、いくつかのサイトに掲載されて紹介された。また、外部との連携の中で Collatz を広く知ってもらうこともできた。外部からくる問い合わせやメッセージは、今年度だけで 1000 件以上に上った。質問対応に関しては真面目に返している。多くは、感謝や激励である。質問対応単体では 200 件ほどであった。平均一日一通である。同一人物から複数回送られてくる場合もあれば、一度だけの場合もあった。

第4章 まとめと反省、今後の展望など

まとめとしては、昨年度に打って変わり、Collatz の需要や必要性が急上昇した一年であった。本数を増量し、宣伝した効果が強く出たのだと思う。現状、数学を学習するのは、独学でなく大学に通っていても難しい。それは、単純に大学数学と高校数学のギャップのようなものから、数学を受験のためにしか考えていない教員が多いからである。数学とは、問

題を解くためのツールではなく、問題や状況を整理し理想化された解法を一般社会へと適用するところが義務教育で数学を取り扱う内容があるのだと思う。そういった知識が技術を身につけることは小学校教員をはじめ、教育に携わるもの全員に必要な能力であると考えられる。しかしながら、そういった感覚を持っていないがために、数学を学習できない、もっと深く知りたいという欲求に応えてもらえない状況があるのだろうと推察される。それに比べられる形に昨年度以上に実現できていたと思う。

一方で、コラッツの森という今年立ち上げた企画はなかなか軌道に乗らなかった。Collatz チャンネルのユーザーにはなかなかウケない内容であるし、対象とする層が違いすぎて、目に届いていないのが一番の原因であると考えられる。また、そのために宣伝がうまくいかなかったのも反省点である。

今後の展望としては、
院試の問題を取り扱うなどの、より学生向けの内容を充実させること
現代的な研究内容（擬等角写像論(タイヒミュラー空間論)、代数曲線論) などを取り入れたより発展的かつユーモアに富んだ動画を作成すること
コラッツの森のコンテンツ数の充実を図り、多人に見てもらえるようにすること
などが挙げられる。

<参考・引用文献>

参考・引用文献

講義録を作成するのに引用した書物は多すぎてここにまとめられない。主として利用したもののみ挙げる。

・”Complex analysis:an introduction to the theory of analytic functions of one complex variable the Third” Lars V. Ahlfors 著
(出版 McGraw-Hill,c1979)

・Lectures on quasiconformal mappings Lars V. Ahlfors 著 (出版 American Mathematics Society)

・ “Iteration of rational functions” Alan F Beardon 著 (Springer)

・”解析入門 1” 杉浦光夫 著 (東京大学出版)

・ “理工系の微分積分学” 吹田信之 新保経彦 著 (現代数学ゼミナール)

・ “集合と位相” 鎌田正良 著 (現代数学ゼミナール)

・ “代数系入門” 松坂和夫 著 (常華房)

・ “線型代数入門” 斎藤正彦 著 (東京大学出版)

・ “Basic Category Theory” Tom Leinster 著 (Cambridge Studies in Advanced Mathematics)

・ “関数解析” 宮寺功 著 (ちくま学芸出版)

・ “Principles of Mathematical Analysis” 著 Walter Rudin

・ “測度と積分” 鶴見茂 著 (現代理工社)